EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….**085**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul vectorului $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(2,0,3)$ la planul $2x + y + 5z - 4 = 0$ **.**

(4p) **c)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre elipsa de ecuație $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ şi dreapta de ecuație $y = 2x$.

(4p) **d)** Să se arate că $\sin 2 > \cos 2$.

(2p) **e)** Să se calculeze aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2, 3)$**,** $B(4, 9)$ şi $C(8, 27)$**.**

(2p) **f)** Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(\sin 15^\circ + i\cos 15^\circ)^3 = a + bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se arate că $\log_3 4 > 1$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x} \in \mathbf{Z}_5$ să verifice relația $\hat{x}^2 = \hat{1}$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 3x + 6$ are inversa $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, să se calculeze $g(10)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 8^x = 10$.

(3p) **e)** Să se calculeze produsul rădăcinilor polinomului $f = X^3 - X + 10$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x - x - 2$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră polinoamele $f = a + bX + cX^2 + dX^3$ şi $g = X^4 - 1$, unde $a,b,c,d \in \mathbf{C}$, iar g are rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{C}$ şi matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ şi $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $g = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$.

(4p) **b)** Să se arate că $\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$.

(4p) **c)** Să se determine rangul matricei V.

(2p) **d)** Să se arate că $AV = \begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & f(x_4) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) & x_4 f(x_4) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) & x_4^2 f(x_4) \\ x_1^3 f(x_1) & x_2^3 f(x_2) & x_3^3 f(x_3) & x_4^3 f(x_4) \end{pmatrix}$.

(2p) **e)** Utilizând relația $\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y), \forall X, Y \in \mathbf{M_4}(\mathbf{C})$, să se arate că $\det(A) = f(x_1) f(x_2) f(x_3) f(x_4)$.

(2p) **f)** Pentru $a = c = d = 0$ şi $b = 1$, să se calculeze A^2 şi A^4.

(2p) **g)** Pentru $a = c = d = 0$ şi $b = 1$, să se arate că matricea A este inversabilă şi să se calculeze inversa sa.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră $n \in \mathbf{N}^*$ şi funcțiile $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x} x^n$, $g : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1 - e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)$ şi $h : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f(t)dt$.

(4p) **a)** Să se calculeze $g(0)$ şi $h(0)$.

(4p) **b)** Să se verifice că $g'(x) = h'(x)$, $\forall x \geq 0$.

(4p) **c)** Să se arate că $h(x) = g(x)$, $\forall x \geq 0$.

(2p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

(2p) **e)** Să se arate că $0 \leq g(x) \leq \frac{e^{-x} x^{n+1}}{n!}$, $\forall x \in [0, n]$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $x \geq 0$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = 0$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$, $\forall x \geq 0$.